ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐINH THỊ THẢO

HỆ PHƯƠNG TRÌNH CẶP TÍCH PHÂN FOURIER CỦA BÀI TOÁN BIÊN HỖN HỢP ĐỐI VỚI DẢI ĐÀN HỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐINH THỊ THẢO

HỆ PHƯƠNG TRÌNH CẶP TÍCH PHÂN FOURIER CỦA BÀI TOÁN BIÊN HỖN HỢP ĐỐI VỚI DẢI ĐÀN HỒI

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN THỊ NGÂN

Thái Nguyên - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020
Người viết luận văn

ĐINH THỊ THẢO

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự giúp đỡ nhiệt tình của **TS. Nguyễn Thị Ngân**. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô giáo và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều cô giáo đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên, các Phòng chức năng của Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên, các Quý Thầy Cô giảng dạy lớp Cao học k26 (2018 – 2020) Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Tác giả

ĐINH THỊ THẢO

Mục lục

Mở đầu

Phương trình cặp tích phân và hệ phương trình cặp tích phân thường xuất hiện trong các bài toán về dị tật, trong môi trường như các bài toán về vết nứt, các bài toán về dải đàn hồi.

Tính tồn tại và duy nhất nghiệm của các bài toán này đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân với phép biến đổi Fourier được một số nhà toán học như Popov.G.Ya, Duduchavar.R, Nguyễn Văn Ngọc,... quan tâm nghiên cứu. Tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân Fourier được Nguyễn Văn Ngọc, Nguyễn Thị Ngân nghiên cứu.

Với mong muốn được tìm hiểu tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân với phép biến đổi Fourier xuất hiện khi giải bài toán biên hỗn hợp của phương trình song điều hòa trên dải đàn hồi, tôi chọn đề tài "Hệ phương trình cặp tích phân Fourier của bài toán biên hỗn hợp đối với dải đàn hồi". Luận văn ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo, luận văn có 2 chương nội dung:

Chương 1 trình bày tổng quan một số kiến thức cơ bản về hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính, biến đổi Fourier của các hàm cơ bản, các không gian Sobolev, không gian Sobolev vectơ, toán tử giả vi phân.

Chương 2 trình bày về tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân Fourier xuất hiện khi giải bài toán biên hỗn hợp đối với dải đàn hồi, đưa các hệ phương trình cặp tích phân Fourier về hệ phương trình tích phân kỳ dị, đưa tiếp hệ phương trình tích phân kỳ dị về hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này trình bày một số kết quả về hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính, biến đổi Fourier của các hàm cơ bản giảm nhanh, biến đổi Fourier của các hàm suy rộng tăng chậm, không gian Sobolev, không gian Sobolev vectơ, toán tử giả vi phân. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo từ tài liệu $[2, 3, 4]$.

1.1 Hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính

Định nghĩa 1.1.1. Hệ phương trình

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i, \quad (i = 1, 2, ...), \tag{1.1}$$

trong đó x_i là các số cần xác định, $c_{i,k}$ và b_i là các hệ số đã biết, được gọi là hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính.

Định nghĩa 1.1.2. Tập hợp những số $x_1, x_2, ...$ được gọi là nghiệm của hệ (1.1) nếu khi thay đổi những số đó vào vế phải của (1.1) ta có các chuỗi hội tụ và tất cả những đẳng thức được thoả mãn. Nghiệm được gọi là nghiệm chính nếu nó được tìm bằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp với giá trị ban đầu bằng không.

Định nghĩa 1.1.3. Hệ vô hạn (1.1) được gọi là hệ chính quy nếu

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < 1, \quad (i = 1, 2, ...) . \tag{1.2}$$

Nếu có thêm điều kiện

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \leq 1 - \theta, \; 0 < \theta < 1, \; (i = 1, 2, ...) , \tag{1.3}$$

thì hệ này được gọi là hoàn toàn chính quy. Nếu các bất đẳng thức (1.2) (tương ứng (1.3)) đúng với $i = N+1, \; N+2, ...$, thì hệ (1.1) được gọi là tựa chính quy (tương ứng, tựa hoàn toàn chính quy).

Ta kí hiệu

$$\rho_i = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}|, \; (i = 1, 2, ...).$$

Hệ chính quy $\rho_i > 0$, hệ hoàn toàn chính quy cho $\rho_i \geq \theta > 0$.

Giả sử hệ (1.1) là hệ chính quy và các hệ số tự do b_i thỏa mãn điều kiện

$$|b_i| \leq K\rho_i, \; (K = \text{const} > 0) . \tag{1.4}$$

Định lý 1.1.4. *(Sự tồn tại của nghiệm bị chặn). Nếu các hệ số tự do của hệ vô hạn chính quy thoả mãn điều kiện* (1.4) *thì nó có nghiệm bị chặn* $|x_i| \leq K$ *và nghiệm này có thể tìm được bằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp.*

Định lý 1.1.5. *(Sự "chặt cụt"). Nghiệm chính* x^* *của hệ chính quy*

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i, \quad (i = 1, 2, 3, ...) ,$$

cùng với các hệ số tự do thỏa mãn điều kiện $|b_i| \leq K\rho_i$ *có thể tìm được bằng phương pháp "chặt cụt", nghĩa là nếu* x_i^N *là nghiệm của hệ hữu hạn*

$$x_i = \sum_{k=1}^{N} c_{i,k} x_k + b_i, \quad (i = 1, 2, 3, ..., N) ,$$

thì

$$x_i^* = \lim_{N \to \infty} x_i^N .$$

Định lý 1.1.6. *Hệ chính quy có thể có không quá một nghiệm tiến đến không, nghĩa là*

$$\lim_{i\to\infty} x_i = 0.$$

1.2 Biến đổi Fourier

1.2.1 Biến đổi Fourier của các hàm cơ bản giảm nhanh

Không gian S của các hàm cơ bản giảm nhanh

Định nghĩa 1.2.1. Kí hiệu $S = S(\mathbb{R})$ là tập hợp của các hàm khả vi vô hạn $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ thoả mãn điều kiện

$$|[f]|_p = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|)^p \sum_{k=0}^{p} \left|D^k f\right| < \infty,\ p = 0, 1, 2, ..., m,$$

trong đó kí hiệu $D = \dfrac{d}{dx}$. Dãy $\left\{|[f]|_p\right\}_k$ là một họ các nửa chuẩn. Dãy $\{f_k\} \subset S$ được gọi là hội tụ đến hàm $f \in S$, nếu $|[f_k - f]|_p \to 0$, khi $k \to \infty, p = 0, 1, 2, ..., m$. Tập hợp S với hội tụ trên dãy được gọi là không gian các hàm cơ bản giảm nhanh.

Ví dụ: Hàm $f(x) = e^{-x^2} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ là hàm giảm nhanh.

Định lý 1.2.2. *Tập hợp $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ của các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong S là trù mật trong S theo topo của S.*

Biến đổi Fourrier của các hàm cơ bản

Định nghĩa 1.2.3. Biến đổi Fourier của các hàm cơ bản $f \in S$ được xác định theo công thức

$$F[f](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixt}dx. \tag{1.5}$$